

# A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO E A ESCOLHA DO PASSO DA RECONSTRUÇÃO

Antônio Carlos da Silva Filho (Uni-FACEF)  
Fabiano Guasti Lima (USP)

## 1 INTRODUÇÃO

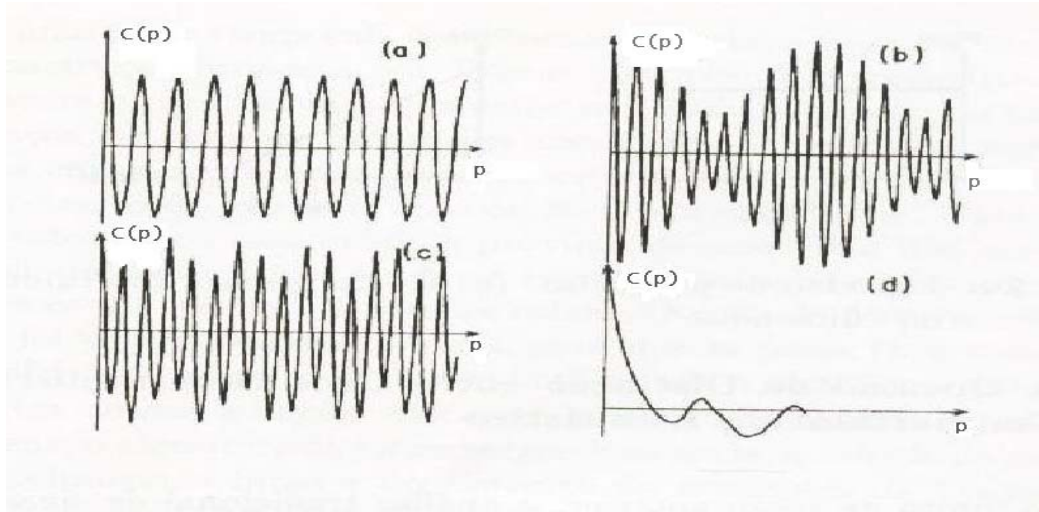
A função de autocorrelação mede o grau de correlação de uma variável, em um dado instante, consigo mesma, em um instante de tempo posterior. Ela permite que se analise o grau de irregularidade de um sinal. Pode ser definida como a razão entre a autocovariância e a variância para um conjunto de dados:

$$c_k = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$ACF(k) = \frac{c_k}{c_0}$$

Colocados em um gráfico, os valores da função de autocorrelação apresentam-se como os da figura 5:

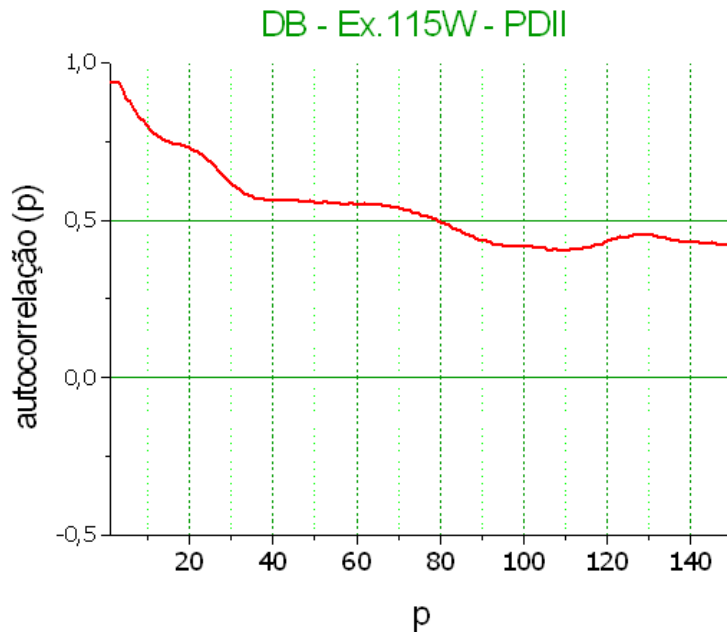


**Fig. 1.** Função de autocorrelação. (a) Sinal periódico; (b e c) sinal *quasi*-periódico; (d) sinal caótico ou estocástico.

Uma das utilidades da função de autocorrelação é na determinação do passo da reconstrução para se obter o atrator caótico, caso haja algum presente. Esta determinação é baseada no teorema de Takens, que estabelece as condições para a construção de vetores  $\xi_i$   $m$ -dimensionais a partir de uma única variável no tempo  $\{x_i\}$ , onde  $x_i = x(t_i)$  e  $i=1,2,\dots,N$ . Em cada vetor  $\xi_i$ ,  $x(t_i)$  é sua primeira coordenada,  $x(t_i+p)$  a segunda, e  $x(t_i+(m-p))$  a última coordenada, onde  $p$  é o passo dessa construção. Os valores  $m$  são procurados como valores crescentes e sucessivos ( $m = 2,3,\dots$ ). Um ótimo estimador de  $p$  é aquele que indica, aproximadamente, o tempo de decorrelação da série, ou seja,  $p$  deve ser tal que

$$C(p) = \frac{1}{2}C(0)$$

Um exemplo gráfico pode ser visto na figura a seguir:



**Fig. 2.** Correlograma para a função de autocorrelação dos intervalos R-R de um indivíduo normal. O passo da reconstrução é, aproximadamente,  $p = 50$ .

Ocorre que o passo, como mostraremos, depende da quantidade de pontos utilizada nos cálculos, podendo alterar de maneira muito significativa os resultados.

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

O correlograma é um gráfico de  $ACF(k)$  em função de  $k$ . Já o passo da reconstrução ( $p$ ), é o menor valor de  $k$  que faz com que  $ACF(k) < K$ , com  $K = 0.5$  OU  $1/e$ . Correlograma é o gráfico colocado na figura 2 acima.

Uma das utilidades da função de autocorrelação é na determinação do passo da reconstrução para se obter o atrator caótico, caso haja algum presente. Esta determinação é baseada no teorema de Takens, que estabelece as condições para a construção de vetores  $\xi_i$   $m$ -dimensionais a partir de uma única variável no tempo  $\{x_i\}$ , onde  $x_i = x(t_i)$  e  $i=1,2,\dots,N$ . Em cada vetor  $\xi_i$ ,  $x(t_i)$  é sua primeira coordenada,  $x(t_i+p)$  a segunda, e  $x(t_i+(m-p))$  a última coordenada, onde  $p$  é o passo dessa construção. Os valores  $m$  são procurados como valores

crescentes e sucessivos ( $m = 2, 3, \dots$ ). Um ótimo estimador de  $p$  é aquele que indica, aproximadamente, o tempo de decorrelação da série, ou seja,  $p$  deve ser tal que

$$C(p) = \frac{1}{2} C(0)$$

Assim, para fazer a reconstrução do atrator, construímos vetores em duas, três, quatro e mais dimensões (chamadas de dimensão de imersão) até que os resultados indiquem que já atingimos a dimensão euclidiana mínima do  $m$ -espaço que contém o atrator. Assim, para dimensão igual a dois, construímos as duplas:  $(X_k, X_{k+p})$ , para dimensão igual a três, construímos as ternas  $(X_k, X_{k+p}, X_{k+2p})$ . Apliquemos isto ao atrator de Lorenz.

O atrator de Lorenz foi introduzido por Edward Lorenz em 1963. Ele foi derivado a partir das equações simplificadas de rolos de convecção que ocorrem nas equações da atmosfera. É um mapa caótico, exibindo como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo e cuja forma é conhecida por se assemelhar a uma borboleta. Trata-se de um sistema não-linear, tridimensional e determinístico que exhibe comportamento caótico e demonstra aquilo a que hoje se chama um atrator estranho.

As equações que governam o Atrator de Lorenz são:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

em que a  $\sigma$  se chama o número de Prandt e a  $\rho$  se chama o número de Rayleigh. Todos os  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta > 0$ , mas usualmente  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ , enquanto  $\rho$  varia. O sistema exhibe comportamento caótico para  $\rho = 28$  mas tem órbitas periódicas para outros valores de  $\rho$ .

Integrando estas equações e observando a projeção do atrator no plano X-Y, obtemos o gráfico a seguir:

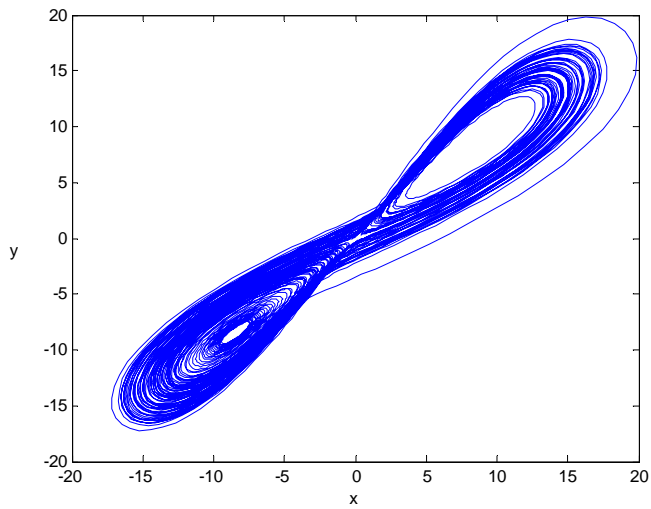


Fig. 3. O atrator de Lorenz no plano X-Y.

Usando um passo  $p$  igual a 1, obtemos, a partir apenas da série temporal da variável X o seguinte gráfico reconstruído:

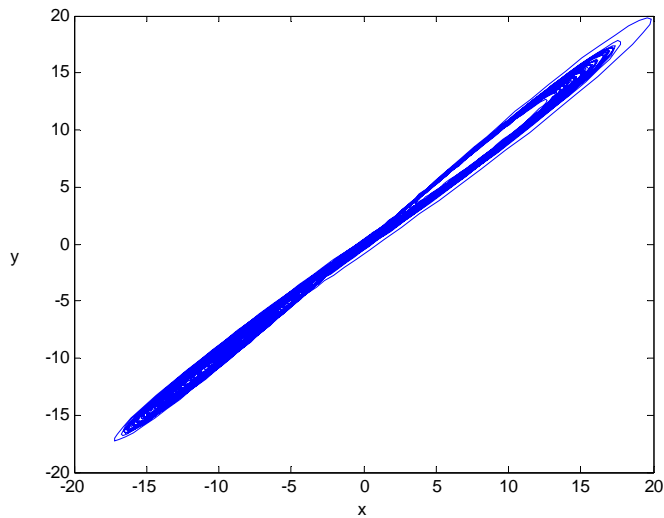


Fig. 4. Reconstrução do atrator a partir da série da variável X, com passo igual a 1.

Usando um passo  $p$  igual a 5, obtemos, a partir apenas da série temporal da variável X o seguinte gráfico reconstruído:

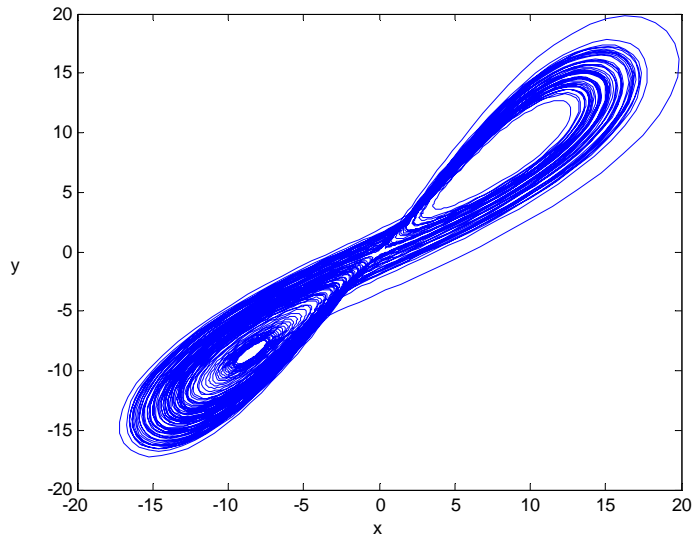


Fig. 5. Reconstrução do atrator a partir da série da variável X, com passo igual a 5.

Usando um passo  $p$  igual a 20, obtemos, a partir apenas da série temporal da variável X o seguinte gráfico reconstruído:

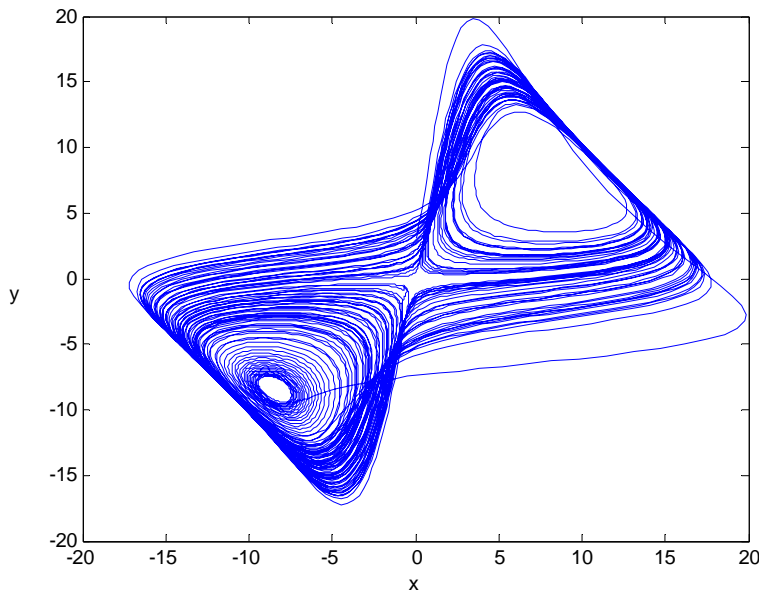


Fig. 5. Reconstrução do atrator a partir da série da variável X, com passo igual a 20.

Assim, vemos que a escolha do passo correto é de fundamental importância para a reconstrução do atrator. Um passo mal escolhido acarreta um atrator incorretamente reconstruído e isto acarreta medidas erradas a partir deste atrator.

### 3 RESULTADOS

O nosso objetivo é mostrar que o passo da reconstrução depende da quantidade de pontos utilizada na avaliação de  $k$  (SILVA FILHO, 2006). Podemos verificar este fato já no seguinte correlograma:

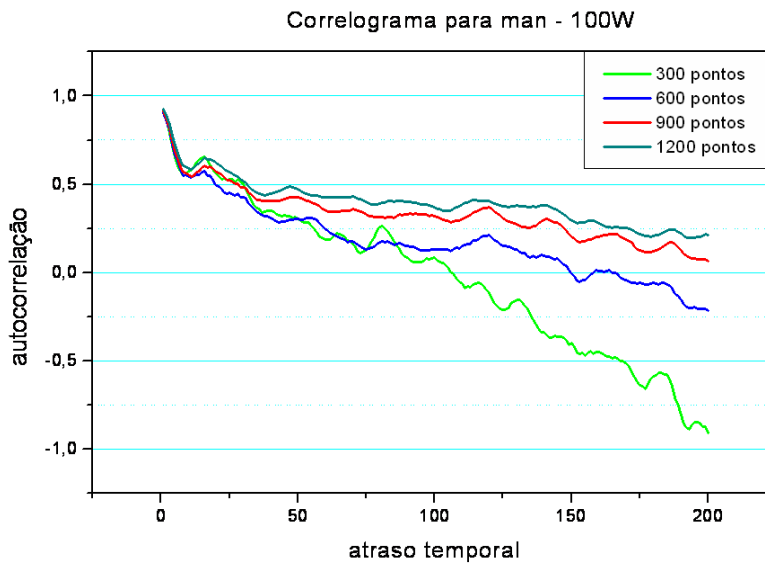


Fig. 6. Correlograma para a série R-R de um indivíduo, calculado para vários comprimentos do conjunto de dados.

Podemos observar que o passo vai, de uma maneira geral, aumentando à medida que mais pontos são acrescentados à série em análise. Vamos examinar, agora, alguns casos simulados no computador. Começemos com uma série quase-periódica:

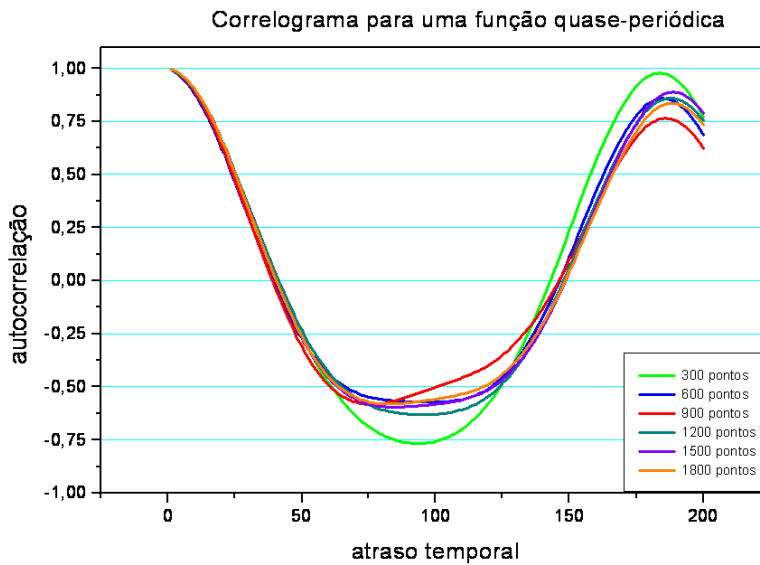


Fig. 7. Correlograma para uma função quase-periódica.

Podemos ver, do gráfico acima, que, para este tipo de função, a quantidade de pontos não altera significativamente o valor do passo. O mesmo pode ser verificado para uma série periódica, aqui representada por uma série de senos:

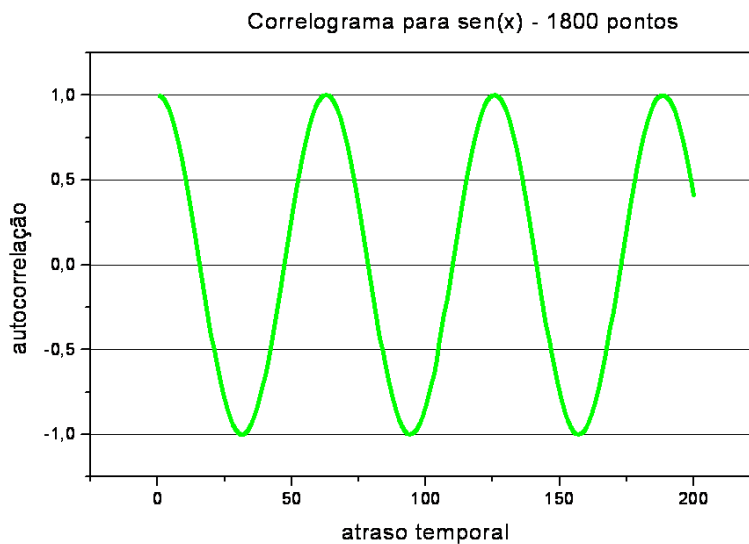


Fig. 8. Correlograma para uma função periódica; neste caso,  $\sin(x)$ . As várias curvas estão superpostas.

Neste caso, o passo é exatamente o mesmo, qualquer que seja a quantidade de pontos utilizada nos cálculos. Mas, se considermos a série formada pelo preço da saca de 60 kg de soja, iremos verificar que:

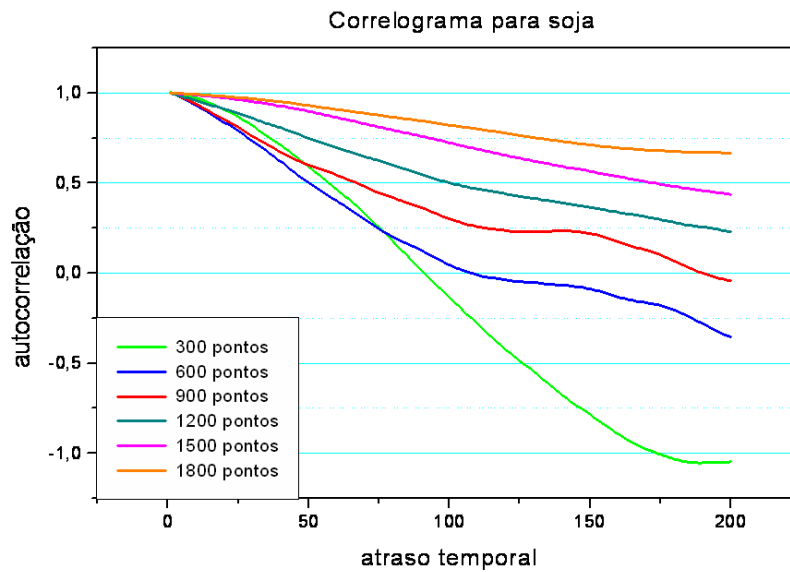


Fig. 9. Correlograma para a série com os preços da saca de 60 kg de soja.

Neste último caso, fica ainda mais evidente a discrepância. Os passos vão de um valor ao redor de 50 para valores que podem ultrapassar os 200. Claramente, os parâmetros calculados sofrerão grandes variações de um extremo a outro. Assim, fica a pergunta: qual é a quantidade de pontos ideal?

#### 4 ANÁLISE E CONCLUSÃO

Variando o número de pontos na série obtém-se diferentes valores de  $p$ , podendo acarretar mudanças significativas nos usos deste passo nas aplicações da teoria dos Sistemas Dinâmicos. Mas a quantidade de dados ideal para o cálculo não pode ser determinada, variando de função para função. Este cálculo será objeto de um estudo que dará continuação ao presente trabalho.

**REFERÊNCIAS**

GRASSBERGER, P. e PROCACCIA, I. Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica 9D*, 189, (1983).

SCHUSTER, H.G. *Deterministic chaos: an introduction*, Verlagsgesellschaft, (1981).

SILVA, E. et al, Design of a computerized system to evaluate the cardiac function during dynamic exercise, *Phy. Med. Biol.*, 33, 409 (1994).

SILVA FILHO, AC et alii, Using the Lag of Autocorrelation Function in Order to Identify the Anaerobic Threshold During Dynamic Physical Exercise. *Computers in Cardiology* 33 p. 625–628, 2006.

TAKENS, Detecting strange attractors in turbulence. In: D.A. Rand; L.S. Young (Ed.). *Dynamical systems and turbulence*, (Springer lecture notes in mathematics) Springer-Verlag, Vol: 898, (1981).

TSONIS, A.A. *Chaos: from theory to applications*, Plenum Press, NY, (1992).