

A RELATIVIDADE GERAL E ALGUMAS NOVAS SOLUÇÕES

Allan Inocência de Souza Costa - Uni-FACEF
Antônio Carlos da Silva - Uni-FACEF

1 INTRODUÇÃO

O movimento, na Mecânica Clássica, é definido em relação a qualquer sistema de referência que esteja em repouso no espaço absoluto ou que tenha um movimento uniforme em relação a este espaço. A Mecânica Clássica usa um espaço euclidiano 3-dimensional absoluto e tempo absoluto. Todos os sistemas inerciais são equivalentes, sendo conectados por transformações galileanas, definindo um grupo de 10 parâmetros:

$$\begin{aligned}\vec{X}' &= R \vec{X} + \vec{v} t + \vec{a} \\ t' &= t + b\end{aligned}\tag{1.1}$$

Os parâmetros são os 3 ângulos de Euler em R , as 3 componentes de \vec{v} , as 3 componentes de \vec{a} e b .

As coisas mudam no caso do Eletromagnetismo Clássico, descrito pelas equações de Maxwell (1864). Estas equações não são invariantes por transformações galileanas, o que levou Maxwell a pensar que suas equações eram válidas apenas nos sistemas de referência que estivessem em repouso em relação ao “éter luminífero”, o qual seria um sistema de referência absoluto.

Ocorre que as equações de Maxwell são invariantes sob um novo grupo de transformações, as transformações de Lorentz. Estas transformações foram, depois, deduzidas por Einstein na sua Teoria da Relatividade Especial de 1905. O princípio da relatividade de Galileu é substituído pelo princípio da relatividade especial: “Todos os sistemas inerciais são equivalente e conectados pelo grupo de transformações de Lorentz”. Este grupo também tem 10 parâmetros. Assim, o espaço da Relatividade Especial é um espaço de Minkowski 4-dimensional (ou seja, pseudo-euclidiano). A forma quadrática que o define é invariante sob transformações de Lorentz, ou seja, tem a mesma forma em todos os sistemas inerciais e é dada pela expressão:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.2)$$

A Teoria da Relatividade Geral (1916) veio a generalizar a Teoria Especial ao considerar sistemas de referência não-inerciais. Mas, sob outro prisma, também constitui uma nova teoria de gravitação. A primeira teoria de gravitação foi construída por Newton e declarava que a força atrativa entre dois corpos é proporcional ao produto de suas massas, sendo estas as massas gravitacionais, que seriam iguais às massas inerciais das equações da Dinâmica formuladas pelo próprio Newton. Ele provou, em 1684, que, se os planetas sofrem uma força atrativa do tipo $1/r^2$, eles obedecem a todas as leis de Kepler. Mas a teoria de Newton não é compatível com a Relatividade Especial. A teoria de Newton da gravitação é covariante com relação às transformações galileanas, mas não o é para com as transformações de Lorentz, ou seja, é válida apenas para velocidades muito menores do que a velocidade da luz.

Um primeiro passo para resolver este problema da covariância foi dado por Einstein ao formular o Princípio da Equivalência forte: “É possível anular qualquer campo gravitacional externo escolhendo convenientemente um sistema de referência local; desta forma todas as leis da natureza, incluindo a lei gravitacional, possuem a mesma forma, como se não houvesse campo gravitacional externo”. Einstein introduziu o postulado de que o espaço-tempo é curvo na presença de um campo gravitacional. Assim, a Teoria da Relatividade Geral, ao relacionar gravitação e curvatura do espaço-tempo é uma teoria da gravitação (da qual a teoria de Newton é apenas uma aproximação).

Uma comparação entre os princípios inerciais de Newton revela que, para Newton, um corpo que não está submetido a qualquer força tem um movimento retilíneo e uniforme: ele descreve uma geodésica do espaço euclidiano; já para Einstein, um corpo não submetido a uma outra força além da gravitacional segue uma geodésica de um espaço-tempo curvo. Einstein conectou gravitação e geometria.

O intervalo quadrático diferencial (1.2) é o mesmo para todos os sistemas referenciais. Se considerarmos um sistema acelerado (por exemplo: um sistema girando) ele adquire uma forma mais geral:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.3)$$

com $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$. Como sistemas acelerados são equivalentes a campos gravitacionais, esses últimos são determinados pela métrica espaço-temporal $g_{\mu\nu}$.

A Relatividade Geral é formulada em um espaço riemanniano 4-dimensional no qual os pontos são determinados por um sistema de coordenadas geral não-inercial (x^0, x^1, x^2, x^3) , denotados por x^μ . O espaço tem três dimensões espaciais e uma temporal.

A Teoria da Relatividade Geral está fundamentada no fato de que a estrutura geométrica do espaço-tempo é determinada pelo seu conteúdo (de matéria e energia):

$$(\text{geometria}) \leftrightarrow (\text{matéria-energia}) \quad (1.4)$$

As equações de Einstein no interior da matéria são:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}T^{\mu\nu} \quad (1.5)$$

Já sem a presença de matéria e onde não há campo físico, exceto o gravitacional (ou seja, no espaço vazio), temos:

$$R^{\mu\nu} = 0 \quad (1.6)$$

onde:

$R^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci dado por

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \quad (1.7)$$

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\sigma\mu} (g_{\lambda\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\lambda} - g_{\lambda\nu,\sigma}) \quad (1.8)$$

e $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia dado pela equação:

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

Assim, as equações da Relatividade Geral relacionam a geometria (através do tensor fundamental $g_{\mu\nu}$ e a física (através do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}$).

Assumindo, nas equações de Einstein, uma métrica conhecida como Bianchi tipo I localmente, rotacionalmente simétrico (LRS), o elemento de linha (1.3) assume a forma:

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)(dy^2 + dz^2) \quad (1.10)$$

Isto descreve um universo que se expande ou contrai a diferentes razões em diferentes direções, sendo x , y e z os eixos principais do movimento radial, e possivelmente anisotrópico.

Quando colocamos a métrica (1.7) nas equações de Einstein (1.5), obtemos as seguintes relações entre A e B :

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 &= -\chi_o p \\ \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{A}}{A} + \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)\left(\frac{\dot{B}}{B}\right) &= -\chi_o p \\ 2\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)\left(\frac{\dot{B}}{B}\right) + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 &= -\chi_o \rho \end{aligned} \quad (1.11)$$

Combinado as duas primeiras equações do sistema (1.8), obtemos:

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \left(\frac{\dot{B}}{B}\right)^2 - \left(\frac{\dot{A}}{A}\right)\left(\frac{\dot{B}}{B}\right) - \frac{\ddot{A}}{A} = 0 \quad (1.12)$$

que nos permite verificar se as soluções geradas estão corretas, ou seja, se os coeficientes métricos, bem como suas derivadas, ao serem levados à equação (1.12), a satisfazem.

Vajk e Eltgroth (1970) obtiveram uma solução particular para a equação (1.10), a qual denominaremos solução VE, onde consideraram $\gamma = 2$, para a equação de estado de um fluido perfeito, expressa em termos da densidade de massa em repouso como uma função da densidade de energia e da pressão p , de uma forma simples:

$$p = (\gamma - 1)\rho \quad (1.13)$$

Obtiveram:

$$\begin{aligned} A_o(t) &= t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \\ B_o(t) &= t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde λ é um parâmetro e que satisfazem à equação de estado $p = \rho$. Neste caso $\lambda > 0$ ou $\lambda < -2$. Assim, o elemento de linha para a solução VE fica da forma:

$$ds^2 = -dt^2 + t^{\left(\frac{2}{1+2\lambda}\right)} dx^2 + t^{\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)} (dy^2 + dz^2) \quad (1.15)$$

2 MÉTODO

Utilizaremos o método de geração de novas soluções que foi proposto por J. H. Boutros (1986). Partindo de uma solução (A, B) , supõe-se novas soluções (Ag, B) e (A, Bf) , onde g e f são funções a serem determinadas.

Vejamus (Ag, B) . Substituindo na equação (1.12), obtemos:

$$\ddot{g} + g \left[\frac{\dot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{A}}{A} \right] = 0 \quad (2.1)$$

Cuja solução é:

$$g = k' + k \int \frac{1}{BA^2} dt \quad (2.2)$$

onde k' e k são constantes de integração.

Temos, por outro lado, (A, Bf) . Substituindo na equação (1.12) obtemos:

$$\ddot{f} + f \left[4 \frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{f}}{f} - \frac{\dot{A}}{A} \right] = 0 \quad (2.3)$$

Chamando: $\frac{\dot{f}}{f} = h$, temos: $f = e^{\int h dt}$ (*). Substituindo em (2.3) obtemos:

$$\dot{h} + 2h^2 + \left[4 \frac{\dot{B}}{B} - \frac{\dot{A}}{A} \right] h = 0 \quad (2.4)$$

que é uma equação do tipo Riccati. Resolvendo para h e substituindo em (*) obtemos:

$$f = c' \left[\int \frac{A}{B^4} dt + c \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

onde c' e c são constantes de integração.

Boutros obteve, então, duas novas soluções, as quais denominou de universos U_1 e U_2 :

Universo U_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_o = t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \\ B_1 &= t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Universo U_2 :

$$\begin{aligned} A_2 &= t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ B_2 &= B_o = t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração.

Assim os elementos de linha para U_1 e U_2 são respectivamente da forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= t^{\left(\frac{2}{1+2\lambda}\right)} dx^2 + t^{\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right] (dy^2 + dz^2) - dt^2 \\ ds^2 &= t^{\left(\frac{2}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right]^2 dx^2 + t^{\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)} (dy^2 + dz^2) - dt^2 \end{aligned}$$

3 RESULTADOS

Através da técnica de gerar soluções e utilizando as soluções de Boutros (A_1, B_1) e (A_2, B_2) como soluções iniciais, geramos quatro novas soluções:

Duas de (A_1, B_1) referentes ao universo U_1 :

$$A_3 = B_3 + c_3 t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \quad (3.1.a)$$

$$B_3 = B_1 = t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.b)$$

$$A'_3 = A_0 = t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \quad (3.2.a)$$

$$B'_3 = B_1 = t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ c'' - \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.2.b)$$

Duas de (A_2, B_2) referentes ao universo U_2 :

$$A'_4 = A_2 = t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right] \left\{ k'' - k \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right]^{-1} \right\} \quad (3.3.a)$$

$$B'_4 = B_0 = t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \quad (3.3.b)$$

$$A_4 = A_2 = t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right] \quad (3.4.a)$$

$$B_4 = t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[c_2 \left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} - 2 \left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right)^2 t^{\left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.4.b)$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes de integração.

Duas das soluções geradas são as mesmas que as soluções de Boutros, ou seja, recaem no caso anterior. São elas (3.2.a) e (3.2.b) do universo U_1 e (3.3.a) e (3.3.b) do universo U_2 . Podemos verificar isto por uma simples análise, pois se nós temos $(A, B_1) = (A, Bf)$ então quando tentamos obter $(A, Bff') \equiv (A, Bf'')$ onde $f'' = ff'$, o que obtemos é que $f \equiv f'' \Rightarrow f' = 1$, assim, em (3.2.b), $B'_3 = B_1$. Para $(A_1, B) = (Ag, B)$ temos: $(Agg', B) = (Ag'', B)$ onde $g'' = gg'$ o que obtemos é $g \equiv g'' \Rightarrow g' = 1$. Assim, em (3.3.a), $A'_4 = A_2$.

Portando, restam-nos dois tipos de soluções: uma do universo U_1 e outra do universo U_2 , onde a solução (3.1.a) e (3.1.b) denominaremos de universo U_3 e a solução (3.4.a e 3.4.b) de universo U_4 .

Assim o elemento de linha para o universo U_3 é da forma:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left\{ t^{\left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right]^{\frac{1}{2}} + c_3 t^{\left(\frac{1}{1+2\lambda}\right)} \right\}^2 dx^2 + \\
& t^{\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_1 \right] (dy^2 + dz^2) - dt^2
\end{aligned} \tag{3.5}$$

E para o universo U_4 é da forma:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & t^{\left(\frac{2}{1+2\lambda}\right)} \left[\left(\frac{1+2\lambda}{\lambda-1} \right) t^{\left(\frac{\lambda-1}{1+2\lambda}\right)} + c_2 \right]^2 dx^2 + \\
& t^{\left(\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)} \left[c_2 \left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right) t^{\left(\frac{2-2\lambda}{1+2\lambda}\right)} - 2 \left(\frac{1+2\lambda}{1-\lambda} \right)^2 t^{\left(\frac{1-\lambda}{1+2\lambda}\right)} + c_4 \right] (dy^2 + dz^2) - dt^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são constantes.

4 Análise

Da análise das soluções que obtivemos, vemos que dos possíveis valores para as constantes, há casos em que a métrica (1.10) descreve um universo anisotrópico, enquanto em outros casos ela descreve um modelo homogêneo e isotrópico (modelos de Friedmann-Robertson-Walker).

Como exemplo vejamos o caso do universo U_3 com $\lambda = 2$, $c_1 = 1$ e $c_3 = 0$. Neste caso $A_3^2 = B_3^2$, como podemos ver nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3, e obtemos um universo que expande-se isotropicamente desde uma singularidade inicial pontual, alcança um máximo, contrai-se a outra singularidade pontual em $t = t_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{-5}{2}} \approx 55,9$ e, finalmente, expande-se isotropicamente em $t \rightarrow \infty$, como vemos na figura 4.4.

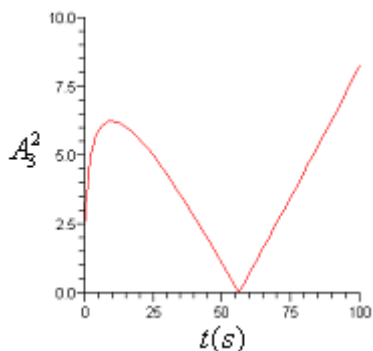


Figura 4.1

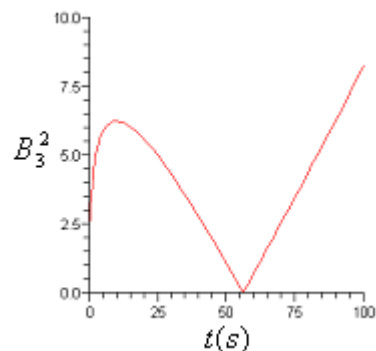


Figura 4.2

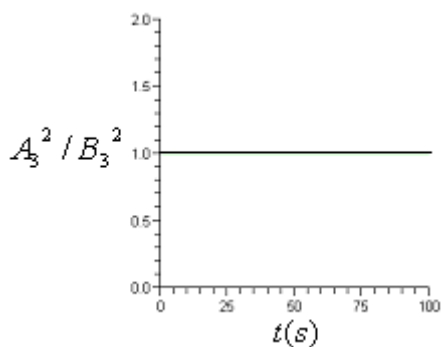


Figura 4.3

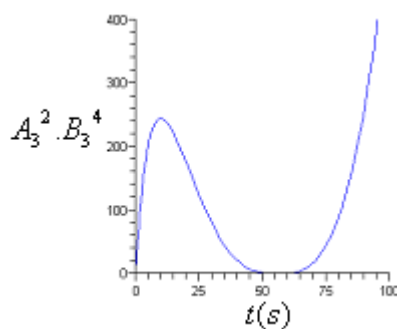


Figura 4.4

5 Conclusão

Acredita-se hoje que o universo deve ser homogêneo e isotrópico desde, pelo menos, $t_1 \approx 0,01 t_0$, onde t_0 é a data presente (ZEL'DOVICH, 1983, p. 477). Mas, de $t = 0$ até t_1 existe a possibilidade de que ele pudesse estar se expandindo de uma maneira anisotrópica, com a condição de que esta expansão se tornasse isotrópica ao redor de t_1 . Assim, o fato de que o modelo isotrópico provavelmente seja o modelo adequado para descrição da evolução do universo em tempos mais atuais não implica que este modelo seja o mais adequado para a descrição da evolução do universo em tempos mais remotos, nas vizinhanças do ponto de singularidade com relação ao tempo.

Desta maneira, as soluções anisotrópicas para a métrica (1.10) obtidas, podem tornar-se importantes no estudo da evolução do universo, principalmente em seus instantes iniciais.

REFERÊNCIAS

- BOUTROS, J. H. New Cosmological Models *J. Math Phys*, v. 9, p. 1072, 1985.
- EINSTEIN, Albert et al. *The Principle of Relativity*. New York: Dover Publications, 1952.
- KAY, David E. *Tensor Calculus*. New York: McGraw-Hill, 1988. 228 p.
- KRAMER, D. et al. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. p. 131.
- MUKAI, Hatsumi. *Sobre alguns modelos cosmológicos anisotrópicos*. 1991. 72 p. (Dissertação em Física das Partículas Elementares). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1991.
- NARLIKAR, Jayant Vishnu. *Introduction to Cosmology*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. 560 p.
- ROBERTSON, H. P. Kinematics and world structure. *Astrophysics J*, v. **82**, p. 284, 1935.
- SCHUTZ, Bernard F. *A first course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 376 p.
- SOUZA, Ronaldo E. de. *Introdução à Cosmologia*. São Paulo: Edusp, 2004. 315 p.
- VAJK, J. P.; ELTOGROTH, P. G. Spatially homogeneous anisotropic cosmological models containing relativistic fluid and magnetic field. *J Math Phys*, v. **11**, p. 2212, 1970.
- WALKER, A. G. On Milne's theory of world structure. *Proc. Lond Math Soc (2)*, v. **42**, p. 90, 1936.
- WEINBERG, Steven. *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley & Sons, 1972. 657 p.
- ZEL'DOVICH, Ya. B.; NOVIKOV, I. D. *The Structure and Evolution of the Universe*. Chicago: Chicago University Press, 1983. 751 p.