

GENERALIZAÇÃO DAS SEQÜÊNCIAS DE FIBONACCI E FLUXOS DE CAIXA EM MATEMÁTICA FINANCEIRA

Letícia Faleiros Chaves - Uni-FACEF
Antonio Carlos da Silva Filho - Uni-FACEF

INTRODUÇÃO

Leonardo Pisano é mais conhecido pelo seu apelido: Fibonacci. Ele era filho de Guilielmo e um membro da família Bonacci. Fibonacci nasceu na Itália, mas foi educado no Norte da África, onde seu pai tinha um posto diplomático. Fibonacci terminou sua formação e suas viagens ao redor de 1200 e, então, retornou a Pisa. Restaram cópias dos seguintes livros escritos por ele: *Liber abaci* (publicado em 1202), *Practica geometriae* (publicado em 1220), *Flos* (publicado 1225), and *Liber quadratorum*.

Liber abaci, publicado em 1202, após o retorno de Fibonacci à Itália, foi baseado na aritmética e na álgebra que Fibonacci acumulou durante suas viagens. Este livro, que foi largamente copiado e imitado, introduziu o sistema posicional decimal e o uso de numerais arábicos na Europa. Um problema na terceira seção do *Liber abaci* levou à introdução dos Números de Fibonacci e da seqüência de Fibonacci, pelos quais Fibonacci é mais lembrado hoje em dia: “Quantos pares de coelhos podem se formar em um ano, partindo de somente um par?”. A resposta, para uma dada condição inicial, levou à seqüência de números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233. Fibonacci provavelmente incluiu o “problema dos coelhos” a partir dos seus contatos no exterior e não inventou nem o problema nem a série de números que levam o seu nome.

Cada termo desta série pode ser obtido a partir dos dois primeiros termos, somando os dois anteriores. A razão entre termos sucessivos nesta série conduz à assim chamada Razão Áurea: 1,61803... . Esta razão também pode ser obtida como uma das raízes da equação: $x^2 = x + 1$. Uma generalização levou a uma série onde, a partir de três termos iniciais arbitrários, obtinham-se os próximos termos somando os três termos imediatamente anteriores. A razão entre dois termos sucessivos desta série converge para o número 1,83928..., que passou a ser conhecido como número Tribonacci (FEINBERG, 1963; ELIA, 2001). Ocorre que este número também pode ser obtido como uma das raízes da equação: $x^3 = x^2 + x + 1$.

Generalizações posteriores levaram à construção de séries a partir de quatro termos arbitrários, cinco termos arbitrários, etc. Em cada uma destas séries, a razão entre termos consecutivos converge, respectivamente, para os números: 1,92756... (número Tetranacci), 1,96594... (número Pentanacci) etc. Estes números também são soluções, respectivamente, das seguintes equações (MUSTONEN, 2005):

$$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$$

e

$$x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

, etc.

Por outro lado, em Matemática Financeira, um fluxo de caixa representa uma série de pagamentos ou de recebimentos que se estima ocorrer em

determinado intervalo de tempo (ASSAF, 2006, p. 178). Para um fluxo de caixa uniforme, com n períodos, chega-se à seguinte equação:

$$x^n = k(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

Onde $k = PMT/PV$, ou seja, é a razão entre o valor uniforme dos pagamentos ou recebimentos (PMT) e o valor presente do fluxo (PV) e $x = 1 + i$, sendo i a taxa de juros do fluxo. Esta equação assemelha-se às anteriores, diferindo das mesmas pelo fator k .

O relacionamento entre as séries generalizadas de Fibonacci e os fluxos de caixa uniformes é o objeto do presente artigo.

MÉTODOS E INSTRUMENTOS

Para a obtenção de tais resultados estudamos as seqüências de Fibonacci, Tribonacci, etc., através de Livio (2006), Bezuska (1977), Elia (2001), Feinberg (1963) e Waddill (1992) e fluxos de caixa de Assaf Neto (2006). Para fazer os cálculos utilizamos o programa Excell e o Matlab (HANSELMAN, 2003).

RESULTADOS

Usando o resultado de que quando $k = 1$ as equações para o fluxo de caixa são do tipo:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1$$

Procuramos encontrar as soluções das equações acima para os casos em que n varia de 2 a 10. O objetivo foi encontrar valores que continuassem a seqüência Fibonacci, Tribonacci, Tetranacci, etc.

Começamos com $n = 2$, valor para o qual podemos obter a tabela abaixo, onde a última casa, à direita, repete o valor da penúltima, indicando a convergência (na coluna da esquerda estão os valores da seqüência e na coluna da direita os valores da razão entre cada termo e o seu antecessor):

Tabela 1. Seqüência Fibonacci

Termos da Seqüência	Razão entre um termo e o anterior
1	
1	
2	2,0000000000000000
3	1,5000000000000000
5	1,6666666666666670
8	1,6000000000000000
13	1,6250000000000000
21	1,6153846153846200
34	1,6190476190476200
55	1,6176470588235300
89	1,6181818181818200
144	1,6179775280898900
233	1,6180555555555600
377	1,6180257510729600

610	1,6180371352785100
987	1,6180327868852500
1597	1,6180344478216800
2584	1,6180338134001300
4181	1,6180340557275500
6765	1,6180339631667100
10946	1,6180339985218000
17711	1,6180339850173600
28657	1,6180339901756000
46368	1,6180339882053200
75025	1,6180339889579000
121393	1,6180339886704400
196418	1,6180339887802400
317811	1,6180339887383000
514229	1,6180339887543200
832040	1,6180339887482000
1346269	1,6180339887505400
2178309	1,6180339887496500
3524578	1,6180339887499900
5702887	1,6180339887498600
9227465	1,6180339887499100
14930352	1,6180339887498900
24157817	1,6180339887499000
39088169	1,6180339887498900
63245986	1,6180339887499000
1,02E+08	1,6180339887498900
1,66E+08	1,6180339887498900

Para o caso $n = 3$, obtemos:

Tabela 2. Seqüência Tribonacci

Termos da Seqüência	Razão entre um termo e o anterior
1	
1	
1	
3	3,0000000000000000
5	1,6666666666666670
9	1,8000000000000000
17	1,8888888888888890
31	1,823529411764710
57	1,838709677419350
105	1,842105263157890
193	1,838095238095240
355	1,839378238341970
653	1,839436619718310
1201	1,839203675344560
2209	1,839300582847630
4063	1,839293798098690
7473	1,839281319222250
13745	1,839288103840490
25281	1,839287013459440
46499	1,839286420632100
85525	1,839286866384220
157305	1,839286758257820

289329	1,839286735958810
532159	1,839286763511440
978793	1,839286754522610
1800281	1,839286754196240
3311233	1,839286755789790
6090307	1,839286755115090
11201821	1,839286755166860
20603361	1,839286755251670
37895489	1,839286755204650
69700671	1,839286755212470
1,28E+08	1,839286755216460
2,36E+08	1,839286755213380
4,34E+08	1,839286755214150
7,98E+08	1,839286755214290
1,47E+09	1,839286755214100
2,7E+09	1,839286755214170
4,96E+09	1,839286755214170
9,13E+09	1,839286755214160
1,68E+10	1,839286755214160

E assim por diante. Colocamos, na tabela abaixo, os valores limites, obtidos como acima, para n variando de 2 a 10:

Tabela 3. Taxa de juros para vários períodos (n)

n	solução	Taxa de Juros (%)
----------	----------------	--------------------------

		(por período)
2	1,61803398874989	61,803398874989
3	1,83928675521416	83,928675521416
4	1,92756197548293	92,756197548293
5	1,96594823664549	96,594823664549
6	1,98358284342432	98,358284342432
7	1,99196419660503	99,196419660503
8	1,99603117973542	99,603117973542
9	1,99802947026230	99,802947026230
10	1,99901863271010	99,901863271010

CONCLUSÃO

Portanto relacionamos as equações dos fluxos de caixa com as equações para os números n-bonacci, obtidas a partir das seqüências generalizadas de Fibonacci. A partir das propriedades destas seqüências generalizadas, descobrimos novos métodos de solução para os problemas das taxas de juros nos fluxos de caixa uniformes, simplificando a sua obtenção, principalmente quando não há uma calculadora financeira por perto.

Obtivemos os resultados já esperados para o caso em que $k = 1$ e estamos trabalhando com os casos em que $k \neq 1$, a fim de encontrar as soluções das equações de fluxo de caixa, partindo de seqüências do tipo Fibonacci, Tribonacci,

etc. Estes casos são mais realísticos e, embora as soluções sejam conhecidas (é só pegar uma calculadora financeira), a maneira de obtermos estes mesmos resultados é totalmente nova.

REFERÊNCIAS

ASSAF NETO, Alexandre. *Matemática Financeira e suas Aplicações*. 9. ed. São Paulo: Editora Atlas, 2006, 448 p.

BEZUSZKA, S.; D'ANGELO, L. An Application of Tribonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly*, . 15.2, 1977, p. 140-146.

BIRKHOFF, Garret; MACLANE, Saunders. *Álgebra Moderna Básica*. 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S. A., 1977. 485 p.

ELIA, M. Derived Sequences, The Tribonacci Recurrence and Cubic Forms. *The Fibonacci Quarterly*, v. 39.2, p. 107-109, 2001.

FEINBERG, M. Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*. v. 1, p. 71-74, 1963.

GRAHAM, Ronald L.; KNUTH, Donald E.; PATASHNIK; Oren. *Matemática Concreta*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1995, 475 p.

HANSELMAN, Duane; LITTLEFIELD, Bruce. *Matlab 6 – Curso Completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 676 p.

LIVIO, Mario. *Razão Áurea: A História de Φ* . Rio de Janeiro: Editora Record, 2006. 333 p.

MUSTONEN, Seppo. Extension of Golden Section to Multiple-Partite division of a Line Segment. 2005, 3 p. Disponível em <http://www.survo.fi/papers/nsection.pdf>. Acesso em: 23 abril 2007.

WADDILL, M. E. The Tetranacci Sequence and Generalizations. *The Fibonacci Quarterly*, v. 30.1, p. 9-15, 1992.