

# A INFLUÊNCIA DO RUÍDO NA DETERMINAÇÃO DA DIMENSÃO DE CORRELAÇÃO EM SISTEMAS CAÓTICOS

Valdirene de Souza (Centro Universitário de Franca)  
Antônio Carlos da Silva Filho (Centro Universitário de Franca)

## 1 INTRODUÇÃO

Seja a seguinte situação: alguém está tentando resolver um problema em uma variável,  $x$ , no qual a solução será usada para se resolver o mesmo problema novamente, e assim por diante. Vários fenômenos na natureza podem ser assim descritos. O crescimento de populações em ecologia é um exemplo, onde a quantidade de indivíduos em um determinado instante depende da quantidade de indivíduos em um instante anterior. Matematicamente, tais situações podem ser colocadas através da seguinte expressão geral:

$$x_{N+1} = f(x_N) \quad (1)$$

Onde, partindo de um valor inicial  $x = x_0$ , calcula-se, sucessivamente,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , etc.

A função  $f(x)$  poderá se apresentar de várias formas. Um exemplo é a função linear:

$$f(x) = \lambda x$$

Este tipo de função pode servir muito bem para uma determinada classe de problemas, mas não é a representação adequada de muitos outros. Considere-se o exemplo em ecologia, onde  $x$  representa o tamanho de uma determinada população de animais. Neste caso,  $\lambda$  deve ser positivo e deduz-se que:

$$x_N = \lambda^N x_0$$

A função linear diz que esta população vai tender à extinção (se  $\lambda$  for um número entre 0 e 1) ou que vai crescer indefinidamente (se  $\lambda$  for um número maior do que 1). O primeiro caso pode perfeitamente acontecer, mas o segundo não. Assim, precisa-se de outra categoria de funções para trabalhar com tais situações. São necessárias as funções não-lineares.

Uma população de animais não pode crescer indefinidamente. Há que se introduzir uma correção na função linear. Assim, por exemplo, faz-se com que o parâmetro  $\lambda$  não seja mais constante, mas varie com o tamanho da população. A maneira mais simples de conseguir isto é fazer a transformação:

$$\lambda \rightarrow \lambda (1 - bx)$$

onde  $b$  é uma constante positiva. Mudando a escala em que se mede o tamanho da população, chega-se à seguinte expressão para  $f(x)$ :

$$f(x) = \lambda x(1 - x) \quad (2)$$

Agora, o tamanho máximo da população é  $x = 1$ . Esta equação é chamada, às vezes, de equação logística, devido a uma equação diferencial estudada pelo matemático belga P. F. Verhulst cerca de 150 anos atrás (BOYER, 1996). Sua versão discreta é conhecida como Mapeamento Logístico.

Um outro sistema, o Atrator de Lorenz, foi introduzido por Edward Lorenz em 1963. Ele foi derivado a partir das equações simplificadas de rolos de convecção que ocorrem nas equações da atmosfera. É um mapa caótico, exibindo como o estado de um sistema dinâmico evolui no tempo num padrão complexo, não-repetitivo e cuja forma é conhecida por se assemelhar a uma borboleta. Trata-se de um sistema não-linear, tridimensional e determinístico que exibe comportamento caótico e demonstra aquilo a que hoje se chama um atrator estranho.

As equações que governam o Atrator de Lorenz são:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z \end{aligned}$$

em que a  $\sigma$  se chama o número de Prandtl e a  $\rho$  se chama o número de Rayleigh. Todos os  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\beta > 0$ , mas usualmente  $\sigma = 10$ ,  $\beta = 8/3$ , enquanto  $\rho$  varia. O sistema exibe comportamento caótico para  $\rho = 28$  mas tem órbitas periódicas para outros valores de  $\rho$ .

Um dos sistemas estudados neste trabalho foi o Mapeamento Logístico; o outro foi o sistema de Lorenz. Apresentaremos os resultados obtidos, na seção 5, para o sistema de Lorenz. O parâmetro analisado foi a Dimensão de Correlação.

## 2 METODOLOGIA

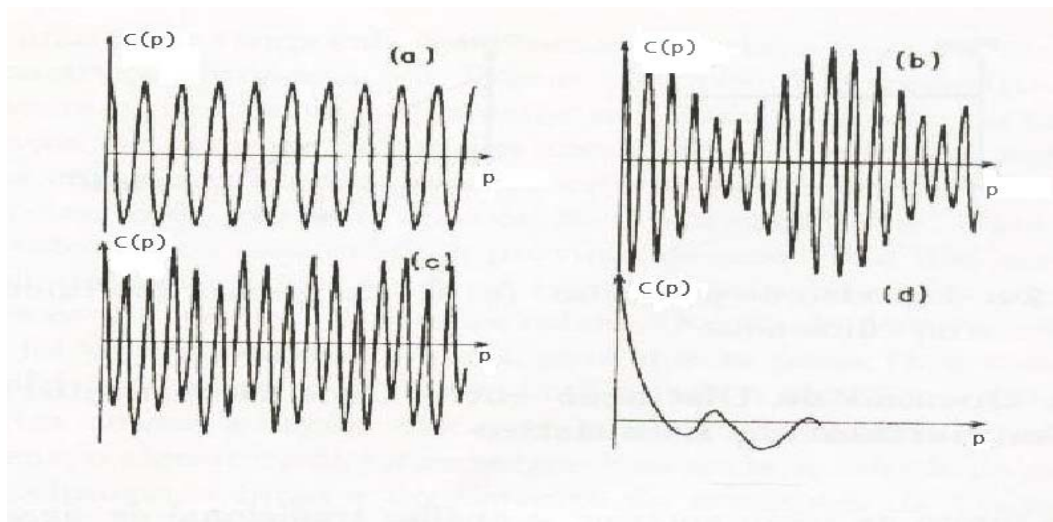
Este é um trabalho que reúne elementos de Matemática Aplicada. Assim, vale-se do método lógico-dedutivo característico desta ciência, e da análise quantitativa de dados experimentais, com a diferença de que, aqui, estes dados são simulados no computador. O estudo das bases matemáticas foi feito através de livros e artigos adequados. Os cálculos referentes às simulações foram feitos no computador, como auxílio do programa MATLAB 7.0 (HANSELMAN, 2003).

### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

Os métodos de análise não-linear de séries temporais, sob o ponto de vista dos Sistemas Dinâmicos são vários. Podemos citar:

- ◆ Dimensão de Correlação (Dc)
- ◆ Diagrama de retorno
- ◆ Expoente de Lyapunov (EL)
- ◆ Entropia de Kolmogorov-Sinai (K-S)

A Função de Autocorrelação permite analisar o grau de irregularidade de um sinal, como pode ser verificado nos gráficos abaixo:



**Fig. 1.** Função de Autocorrelação. (a) Sinal periódico; (b e c) sinal *quasi*-periódico; (d) sinal caótico ou estocástico.

- Com o auxílio da Função de Autocorrelação, podemos calcular o passo  $p$  estabelecido pelo Teorema de Takens, que consiste na construção de vetores  $\xi_i$   $m$ -dimensionais a partir de uma única variável no tempo  $\{x_i\}$ , onde  $x_i = x(t_i)$  e  $i=1,2,\dots,N$ . Em cada vetor  $\xi_i$ ,  $x(t_i)$  é sua primeira coordenada,  $x(t_i+p)$  a segunda, e  $x(t_i+(m-p))$  a última coordenada, onde  $p$  é o passo dessa construção.  $m \rightarrow$  valores crescentes e sucessivos ( $m = 2,3,\dots$ ).
- $p \rightarrow$  um ótimo estimador de  $p$  é aquele que indica, aproximadamente, o tempo de decorrelação da série, ou seja,  $p$  deve ser tal que

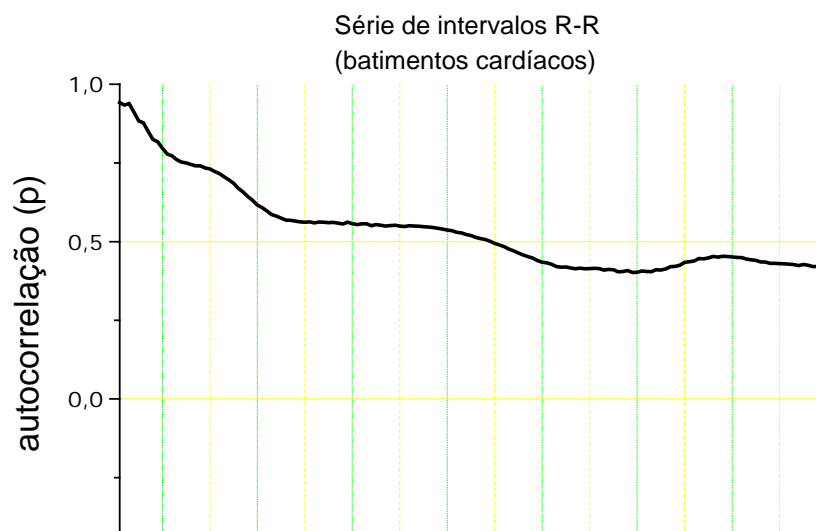
$$C(p) = \frac{1}{2} C(0)$$

Onde

$$C(p) = \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+p} - \bar{x})}{N-p}$$

$$C(0) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Como exemplo, podemos exibir o seguinte gráfico, obtido para uma série temporal relacionada aos batimentos cardíacos (utilizada como teste para o aprendizado):

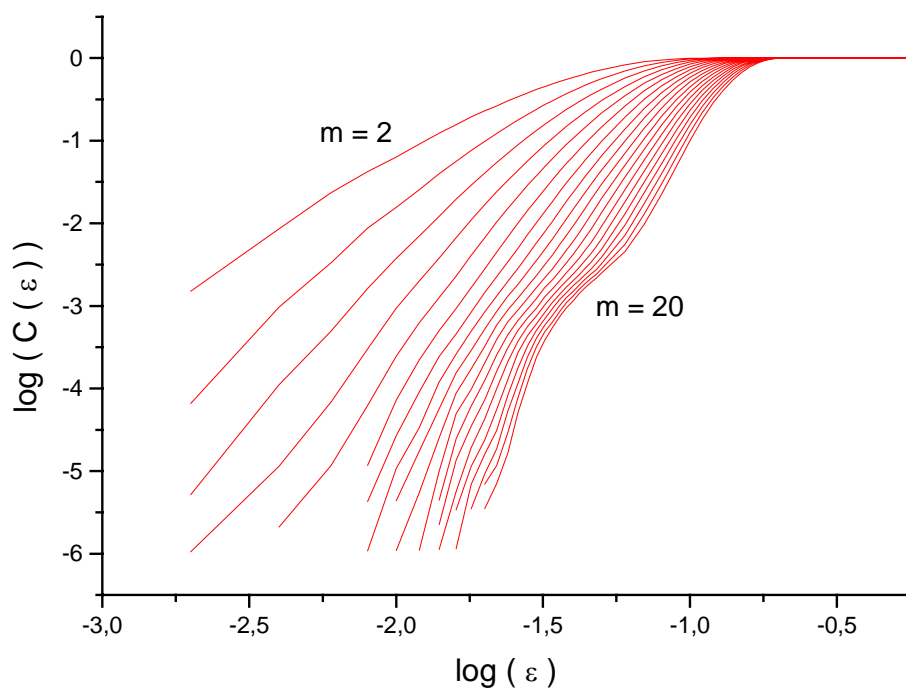


**Fig. 2.** Função de Autocorrelação. O passo da reconstrução, neste caso, resulta ser 78.

A fim de calcular a Dimensão de Correlação, devemos calcular a seguinte expressão (como já foi mencionado acima):

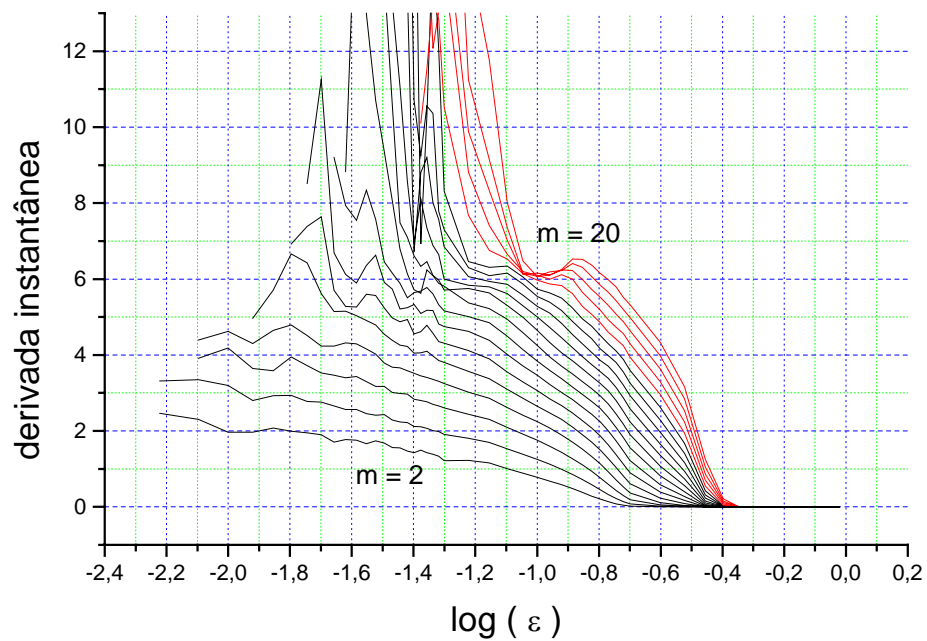
$$D_C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

Como encontrar  $C(\varepsilon)/\log(\varepsilon)$ ? A resposta está na construção de gráficos como o abaixo (feita com os mesmos dados da fig. 2):



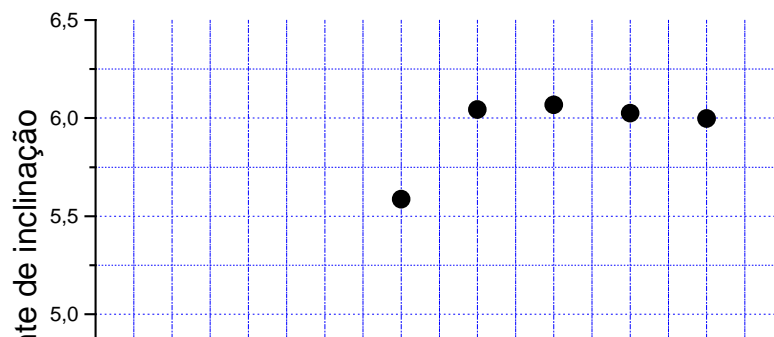
**Fig. 3.** Função de Autocorrelação. O limite das inclinações das curvas fornece a Dimensão de Correlação.

Com o auxílio deste gráfico (na verdade, dos dados com os quais o obtivemos) podemos calcular as derivadas instantâneas ao longo de cada curva e, a partir da análise destas derivadas, determinar a Dimensão de Correlação. Devemos procurar, no gráfico abaixo, a região onde as derivadas tendem a formar um platô horizontal:



**Fig. 4.** Gráfico das derivadas instantâneas para os dados dos gráficos 2 e 3.

Finalmente, uma análise dos valores de dimensão obtidos para cada curva do gráfico acima nos fornece a Dimensão de Correlação. Os dados resultantes foram colocados no gráfico abaixo:



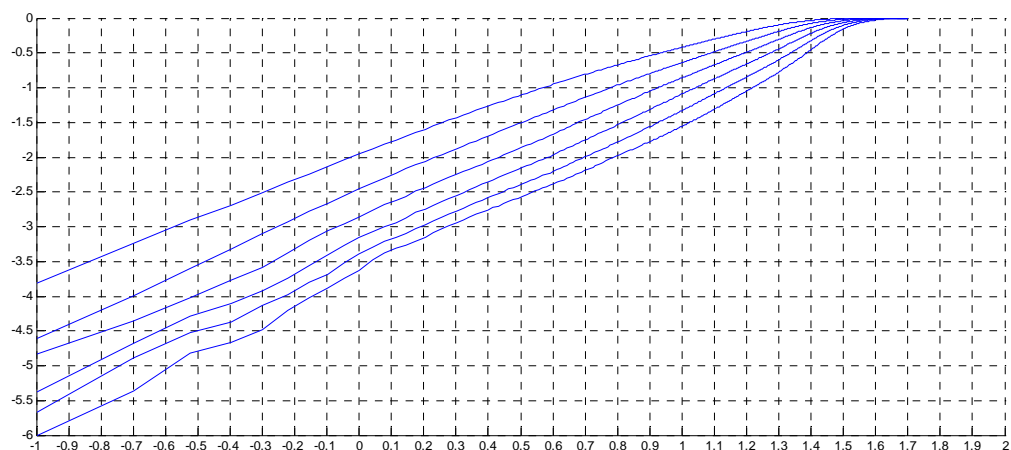
**Fig. 5.** Obtenção da Dimensão de Correlação.

A Dimensão de Correlação, para este caso, resulta ser 6,0.

#### 4 RESULTADOS

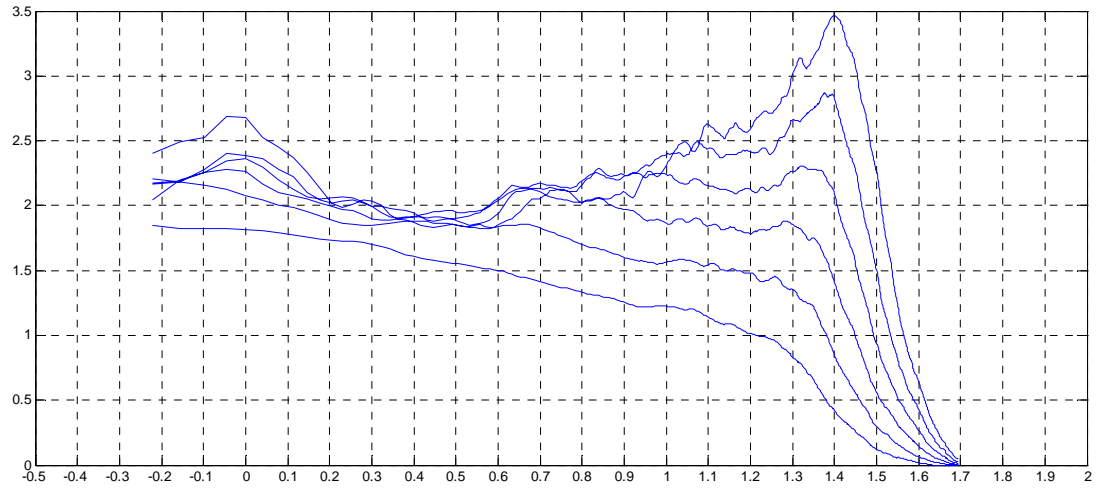
Aplicamos os algoritmos necessários para a obtenção dos resultados relativos às equações acima.

Inicialmente, vamos olhar para o sistema de Lorenz. Quanto não há ruído, temos o seguinte gráfico para o logaritmo da integral de correlação contra o logaritmo de  $\varepsilon$ :



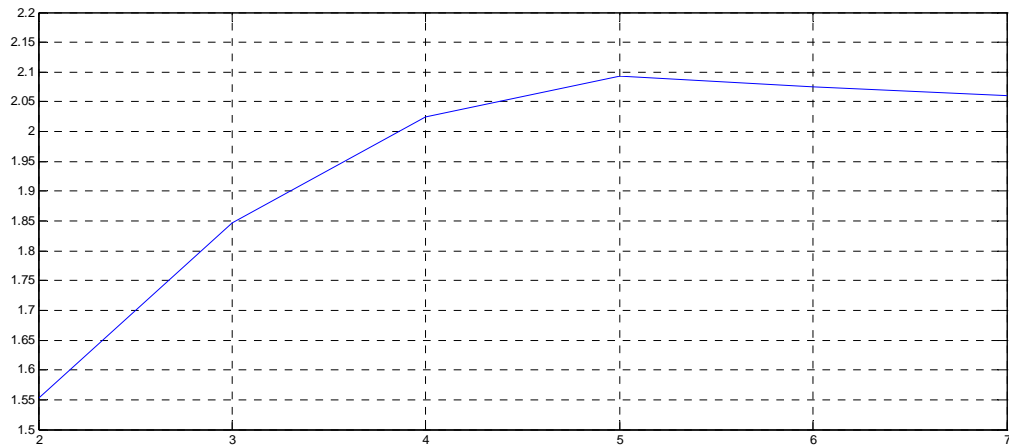
**Fig. 6.** Função de Autocorrelação para o sistema de Lorenz.

As derivadas com onze valores, calculadas através de uma regressão linear, podem ser vistas abaixo:



**Fig. 7.** Derivadas para as curvas da figura 6.

Calculando as dimensões a partir da região adequada, proporcionada pela figura 7, podemos construir o gráfico da figura 8:



**Fig. 8.** Dimensão de Correlação, calculada a partir das curvas da figura 7.

**Tabela 1.** Dimensão de Correlação para o sistema de Lorenz normal

<b>Dimensão de Imersão</b>	<b>Dimensão de Correlação</b>
<b>2</b>	<b>1,5534</b>
<b>3</b>	<b>1,8462</b>
<b>4</b>	<b>2,0254</b>

<b>5</b>	<b>2,0934</b>
<b>6</b>	<b>2,0760</b>
<b>7</b>	<b>2,0611</b>

Os valores assintóticos concordam com os aceitos na literatura,  $D_c = 2,06$ .

Adicionando ruído ao Lorenz, os valores se modificam. Escolhemos duas situações, ambas com ruído aditivo e que não influencia na dinâmica do sistema. Podemos ver os resultados nas tabelas 2 e 3 abaixo:

**Tabela 2.** Dimensão de Correlação para o sistema de Lorenz com ruído adicionado, uniforme e de valor máximo 0,1.

<b>Dimensão de Imersão</b>	<b>Dimensão de Correlação</b>
<b>2</b>	<b>1.5583</b>
<b>3</b>	<b>1.8617</b>
<b>4</b>	<b>2.0567</b>
<b>5</b>	<b>2.1314</b>
<b>6</b>	<b>2.1332</b>
<b>7</b>	<b>2.1289</b>

**Tabela 3.** Dimensão de Correlação para o sistema de Lorenz com ruído adicionado, uniforme e de valor máximo 1,0.

<b>Dimensão de Imersão</b>	<b>Dimensão de Correlação</b>
<b>2</b>	<b>1.2254</b>
<b>3</b>	<b>1.6353</b>
<b>4</b>	<b>2.0127</b>
<b>5</b>	<b>2.3595</b>
<b>6</b>	<b>2.5828</b>
<b>7</b>	<b>2.6469</b>

## 5 CONCLUSÃO

Notamos que, à medida que o nível de ruído aumenta, a dimensão de correlação obtida também aumenta. Isto não é estranho: se considerarmos uma série de números aleatórios, eles tendem a preencher uniformemente o espaço, qualquer que seja a dimensão escolhida; assim, como consequência, quando formos medir a dimensão encontraremos a dimensão do próprio espaço. Começando com um nível de ruído baixo e aumentando este nível, chegará um momento em que o ruído predominará e os resultados da medição serão dominados pelo ruído. A partir deste ponto, uma medida da dimensão produzirá como resultado a medida da própria dimensão de imersão, descaracterizando completamente o sistema original.

## BIBLIOGRAFIA

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda./Editora da Universidade de São Paulo, 1996. 496 p.

DE GRAUWE, P., DEWACHTER, H. e EMBRECHTS, M. *Exchange Rate Theory*. Oxford: Blackwell Publishers, 1993. 328 p.

FERRARA, N. F. e DO PRADO, C. P. C. *Caos – Uma Introdução*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1994. 402 p.

GRASSBERGER, P; PROCACCIA I. Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica*, v. 9D, 1983.

HANSELMAN, Duane; LITTLEFIELD, Bruce. *Matlab 6 – Curso Completo*. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 676 p.

LORENZ, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, v. 20, p. 130-141, 1963.

MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2002. 527 p.

SCHUSTER, H. G. *Deterministic Chaos: an introduction*. Weinheim, VCH Verlagsgesellschaft, 1989. 367 p.

TAKENS, F. *Detecting Strange Attractors in Turbulence*. In: RAND D. A., YOUNG L. S. (ed.) *Dynamical Systems and Turbulence*, (Springer Lecture Notes in Mathematics) vol 898, Springer-Verlag, 1981.

TSONIS, A. A. *Chaos: from theory to applications*, New York, Plenum Press, 1992. 348 p.